野田容助･黒子正人編『長期時系列における貿易データと貿易指数の作成と応用』調査研究報告書, 開発研究センター2005-Ⅱ-04, アジア経済研究所, 2006 年

第３章

対応関係における配分ウエイトの推計

－回帰式によるウエイト制約条件付き最小 2 乗法－

野田容助

要約

商品分類の改訂に伴う商品分類の変換のための配分ウエイトの推計を線形回帰式により求めている。この方法は野田の「回帰式によるウエイト制約条件付き最小 2 乗法」の改訂版であり、対応関係の配分構造から ω_{ij} が 1 であることが知られているときにはこれらのウエイトをパラメターから取り除いてできるだけ推計するパラメターの数を少なくする等の工夫、ウエイトの制約条件としてウエイトの和が 1 となることのみに限定しているのでウエイトの $0 \le \omega_{ij} \le 1$ となる条件も考慮した推計方法である。この推定値の負の調整を含めた配分ウエイトの推計プログラムが dstb_wv8.sp である。

キーワード

貿易データ、商品分類の改訂、商品分類の対応関係、配分ウエイトの推計、等号制約条件付き最小 2 乗法

はじめに

アジア経済研究所が試みている貿易商品グループ内における配分ウエイトの推計方法は第 1 章の表 1 に示されているように取引金額を考慮しないかす

るか、また配分構造を持つかどうかにより大雑把に分類することができる。野田の「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計方法」で紹介されているように、取引額と配分構造を同時に考慮しているのが同一パターンの方法、制約条件なしおよび制約条件付きの最小2乗法、回帰式による方法、比例反復法、ニューラル・ネットワークの方法である。

回帰式による方法は行列で表現されている制約条件付き最小2乗法を線形回帰式の形式に表現し直した方法である。この方法は野田の上記載において「回帰式によるウエイト制約条件付き最小2乗法」として紹介されている。そこで指摘されているように、この方法の検討課題は、（1）対応関係の配分構造からω_{ij}が1であることが知られているときにはこれらのウエイトをパラメターから取り除き、できるだけ推計するパラメターの数を少なくする等の工夫、（2）ウエイトの制約条件としてウエイトの和が1となることのみに限定しているので、ウエイトの$0 \le \omega_{ij} \le 1$となる条件も考慮した推計方法である。

本章では当時作成された線形回帰式によるウエイト制約条件付き最小2乗法のPL/Iにより作成されたプログラムをSPlusあるいはRによるプログラムへ組み替えると同時に、(1) の検討課題についてはその解決方法をプログラムへ組み込んでいる(注1)。推定値が負になったときの調整方法も変更して第2章の方式をそのまま採用している。本章は第1節において線形回帰式によるウエイト制約条件付き最小2乗法を示し、第2節で推計値の既知の値である0と1を取り除いて推計する方法を紹介している。第2節の線形回帰式による方法をSPlusあるいはRで書かれたプログラムがdstb_wv7.spであり、そのプログラムの概念は第3節において紹介される。

1．線形回帰式によるウエイト制約条件付き最小2乗法

本書の第1章では配分ウエイトを行列のまま直接的に推計する方法を示したが、本節ではこの配分ウエイトをベクトルに直して通常の回帰式の形から推計する方法を示す。この方法は野田の「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計―SITC-R1系列の3桁レベル分類コード作成に向けて―」で紹介されているが、推計方法は対応関係の存在しない$\omega_{ij} = 0$を取り除くことを基本としている。それに対して本節の方法では$\omega_{ij} \ne 0$と$\omega_{ij} = 0$を分割する

方法に拡張させているところに違いがある。この方法により次節でおこなう $\omega_{ij}=1$ も同時に取り除くことを可能にする。

本書の序章に示されているように、商品グループ内における分類 A から分類 B の方向に対する変換として ω_{ij} は分類コード A_j から B_i への方向に対する配分ウエイトとする。対応関係にはすべての要素が存在していると仮定する。すべての要素が 1 からなる m 次元のベクトルを l_m とする。$m\times n$ 行列の配分ウエイト行列を W とすれば、

$$W=\begin{pmatrix}\omega_{11} & \cdots & \omega_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \omega_{m1} & \cdots & \omega_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \vdots\\ \omega_m'\end{pmatrix}$$

である。ここで、$i=1\cdots m$ に対して $\omega_i'=\begin{pmatrix}\omega_{i1} & \cdots & \omega_{in}\end{pmatrix}$ である。ウエイトの条件から配分ウエイト行列は、

(1-1) $$l_m'W=l_n'$$

が満たされる。すべてに対応関係があるときの取引額に対する配分ウエイトの構造は、(1-1) 式のウエイト条件のもとで、

(1-2) $$Y=WX+U$$

と表すことができる。

商品分類の対応関係においてすべての対応関係が存在する、すなわち、$\omega_{ij}\neq 0$ とするとき、通常の線形回帰式の形式に直すために (1-2) 式を転値すれば、$Y'=X'W'+U'$ となり、

(1-3) $$\begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_m\end{pmatrix}=X'\begin{pmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_m\end{pmatrix}$$

と表わされる。配分ウエイトを $\omega'=\begin{pmatrix}\omega_1' & \cdots & \omega_m'\end{pmatrix}$ としてベクトルで表わして (1-3) 式を OLS により解く。(1-3) 式の Y' を縦に並び替え y とおけば、

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X' & & \\ & \ddots & \\ & & X'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}$$

と表わされる。これを簡単に、

(1-4) $$y=X_2\omega+u$$

とすれば通常の線形回帰式の形に置き換えることができる。配分ウエイトのウエイト条件は $C=\begin{pmatrix}I_n & \cdots & I_n\end{pmatrix}$ として、

(1-5) $$C\omega=l_n$$

とすることで得られる。

1.1　ラグランジェ乗数法を利用した配分ウエイトベクトルの解

配分ウエイトの推計にはラグランジェ乗数法を利用して、（1-5）式を満足するという制約条件のもとでスカラーで表わされる（1-4）式の残差平方和 $u'u$ を最小にする ω の値 $\tilde{\omega}$ を求めるという方法を採用する。ベクトルを λ とおいて、スカラーs を次のようにする。

(1-6)　$$s = u'u + \lambda'(C\omega - l_m)$$

この式に（1-4）式を代入した後、ω に関して偏微分して 0 とおく。

$$\partial s / \partial \omega = -2X_2'(y - X_2\omega) + C'\lambda$$

この式より、$X_2'X_2$ が正則行列であれば $\tilde{\omega}$ が得られ、

(1-7)　$$\tilde{\omega} = \hat{\omega} - (X_2'X_2)^{-1}C'\lambda$$

となる。ここで、$\hat{\omega}$ は（1-4）式において（1-5）式の制約条件がないときに得られる ω の最小 2 乗推定量であり、

(1-8)　$$\hat{\omega} = (X_2'X_2)^{-1}X_2'y$$

である。さらに、$\partial s / \partial \lambda = 0$ を満足する $\tilde{\omega}$ は、$C\tilde{\omega} - l_m = 0$ も同時に満足し、（1-5）式の制約条件そのものである $C\tilde{\omega} = C\hat{\omega} - C(X_2'X_2)^{-1}C'\lambda = l_m$ となる。この式から λ を求めて、

(1-9)　$$\lambda = \{C(X_2'X_2)^{-1}C\}^{-1}(C\hat{\omega} - l_m)$$

を得る。（1-8）式と（1-9）式を（1-7）式に代入して求める対応関係調整済みのウエイト制約条件付き最小 2 乗解の $\tilde{\omega}$ が得られる。すなわち、対応関係調整済みのウエイト制約条件付き最小 2 乗解の $\tilde{\omega}$ は、

(1-10)　$$M = (X_2'X_2)^{-1}C'\{C(X_2'X_2)^{-1}C'\}^{-1}$$

とするとき、

(1-11)　$$\tilde{\omega} = \hat{\omega} - M(C\hat{\omega} - l_m) = (I - MC)\hat{\omega} + Ml_m$$

として得られる。

1.2　対応関係に $\omega_{ij} = 0$ を含む配分ウエイトベクトルの推計

商品分類の対応関係において $\omega_{ij} = 0$ となる要素を含むのが一般的である。配分ウエイトの推計においては ω から $\omega_{ij} = 0$ の要素を取り除く必要がある。そのため、ω の要素を $\omega_{ij} \neq 0$ のときは ω^* 、$\omega_{ij} = 0$ のときは ω^{**} となるように分割し、$\omega^{p\,\prime} = \left(\omega^{*\prime} \quad \omega^{**\prime}\right)$ とする。この分割には以下に述べる変換行列 P

を利用する。ω の $\omega_1 \cdots \omega_m$ に対応させて $P_1 \cdots P_m$ とし、初期値として $P_i = I_n$ とする。 $\omega_i' = (\omega_{i1} \quad \cdots \quad \omega_{in})$ においてすべての要素が $\omega_{ij} \neq 0$ ときは $P_i^* = I_n, P_i^{**} = \phi$ とする。 $\omega_{ij} = 0$ ときは P_i から j 行を取り除いて P_i^* とし、取り除いた j 行を P_i^{**} とする。

$$P^* = \begin{pmatrix} P_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & P_m^* \end{pmatrix}, \quad P^{**} = \begin{pmatrix} P_1^{**} & & \\ & \ddots & \\ & & P_m^{**} \end{pmatrix}$$

とおき、$P' = (P^{*}{}' \quad P^{**}{}')$ とする。分割された ω を ω^p とすれば、

(1-12) $$\omega^p = P\omega = \begin{pmatrix} P^*\omega \\ P^{**}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^* \\ \omega^{**} \end{pmatrix}$$

として得られる。この変換行列 P は直行行列である。m 次ベクトルで i 番目の要素が 1 で残りのすべてが 0 となるものを $e_i(m)$ 、 $N = mn$ とすれば、P は I_N の行を入れ替えた行列であり、入れ替えた後の i 列を $e_i^*(N)$ とおいて、

$$P = \begin{pmatrix} P^* \\ P^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^*(N) & \cdots & e_N^*(N) \end{pmatrix}$$

であり、

$$P'P = \begin{pmatrix} e_1^*(N)' \\ \vdots \\ e_N^*(N)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^*(N) & \cdots & e_N^*(N) \end{pmatrix} = I_N$$

となるからである。また、ω^p のウエイト条件は P^* のみを利用して、

(1-13) $$C^p = CP^{*}{}'$$

として、

(1-14) $$C^p \omega^* = l_{m^*}$$

となる。 m^* を $\omega_{ij} \neq 0$ となるウエイトの個数、 n^* を ω^* の要素の数とすれば、C^p は $m^* \times n^*$ 行列である。同じようにして X_2 の列を入れ替え、 ω^* と ω^{**} に対応されるように変換された行列を X_3 とすれば、

(1-15) $$X_3 = X_2 P' = \begin{pmatrix} X_3^* & X_3^{**} \end{pmatrix}$$

となる。したがって、$\omega^p{}' = (\omega^{*}{}' \quad \omega^{**}{}')$ と分割されたベクトルに対する回帰式は変換行列 P を利用すれば、(2-2) に対応して、

$$y = X_2 P' P\omega + u = X_3 \omega^p + u = X_3^* \omega^* + X_3^{**} \omega^{**} + u$$

となり、

(1-16) $$y - X_3^{**}\omega^{**} = X_3^* \omega^* + u$$

が得られる。（1-16）式において$\omega^{**}=0$なので、$X_3^{**}\omega^{**}=0$である。また、ウエイト条件となる（1-5）式に対応するのが（1-14）式である。

ウエイト条件の（1-14）式を制約条件とする（1-15）式の$u'u$に対する最小2乗法による解は、

(1-17) $$M_2=(X_3^{*}{}'X_3^{*})^{-1}C^{p}{}'\{C^{p}(X_3^{*}{}'X_3^{*})^{-1}C^{p}{}'\}^{-1}$$

とするとき、ウエイト制約条件付きの最小2乗推定量として、

(1-18) $$\tilde{\omega}^{*}=M_2 l_{m^*}+(I-M_2C^{p})\hat{\omega}^{*}$$

が得られる。ここで、

(1-19) $$\hat{\omega}^{*}=(X_3^{*}{}'X_3^{*})^{-1}X_3^{*}{}'y$$

である。配分ウエイト行列Wにおいて要素が0でない箇所を推計して求めた値、すなわち（1-18）式の結果で置き換えることで$\tilde{W}$が求められる。

1.3　対応関係のない$\omega_{ij}=0$を取り除いた推計の具体例

例として、$\omega'=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\omega_{21} & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$とすれば、$\omega_1$は0の要素を含まないので$P_1^{*}=I_2, P_1^{**}=\phi$とする。しかし、$\omega_2$には$\omega_{22}=0$を含むため、$I_2$から2行目を取り除き$P_2^{*}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}=e_1(2)'$とし、その2行目を$P_2^{*}=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=e_2(2)'$とする。したがって、

$$P^{*}=\begin{pmatrix}I_2 & \\ & e_1(2)'\end{pmatrix}$$

であり、$P^{**}=e_2(2)'$なので、$P'=\begin{pmatrix}P^{*}{}' & P^{**}{}'\end{pmatrix}$となる。このPにより$\omega$は分割される。

$$\omega^{p}=P\omega=\begin{pmatrix}I_2 & \\ & e_1(2)' \\ & e_2(2)'\end{pmatrix}\omega=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_{21}\end{pmatrix} \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^{*} \\ \omega^{**}\end{pmatrix}$$

また、ω^{p}のウエイト条件はP^{*}のみを利用して、、

$$C^{p}=CP^{*}{}'=\begin{pmatrix}I_2 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2 & \\ & e_1(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_2 & e_1(2)\end{pmatrix}$$

となり、$C^{p}\omega^{*}=l_2$となる。同じようにしてX_3を求める。

$$X_3=\begin{pmatrix}X' & & \\ & x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{*} & \\ & P^{**}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}X' & O \\ 0' & x_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 \\ x_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}X_3^{*} & X_3^{**}\end{pmatrix}$$

となる。ω^p と分割されたベクトルに対する回帰式は (2-9) 式で表わされる。$(XX')^{-1}$ を、

(1-19) $$(X_2 X_2')^{-1} = Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

とし、制約条件なしの最小 2 乗解を

(1-20) $$\begin{aligned} \hat{W} &= YX'(XX')^{-1} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} (XX')^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} y_1'x_1c_{11} + y_1'x_2c_{21} & y_1'x_1c_{12} + y_1'x_2c_{22} \\ y_2'x_1c_{11} + y_2'x_2c_{21} & y_2'x_1c_{12} + y_2'x_2c_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。さらに、$\xi = (x_1'x_1)^{-1}$ とおけば、

$$\begin{aligned} &C^p (X_3^*{}' X_3^*)^{-1} C^p{}' = \{(X')' X'\}^{-1} + (x_1'x_1)^{-1} e_1(2) e_1(2)' \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} + \xi & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。この逆行列を計算して、

$$\begin{aligned} &\{C^p (X_3^*{}' X_3^*)^{-1} C^p{}'\}^{-1} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} + \xi \end{pmatrix} \\ &= \delta^{-1} \delta_2 (X')' X' + \delta^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで、$\delta = (c_{11} + \xi) c_{22} - c_{12} c_{21}$ である。また、$(XX')^{-1} = C$ なので、$\delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ とおけば、

$$X'X = \delta_2^{-1} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix}$$

であり、同時に

$$X'X = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'x_1 & x_1'x_2 \\ x_2'x_1 & x_2'x_2 \end{pmatrix}$$

なので、$x_1'x_1 = c_{22}\delta^{-1}$ となり、$(x_1'x_1)^{-1} = c_{22}{}^{-1}\delta = \xi$ である。また、$\delta = \delta_2 + \xi c_{22} = 2\delta_2$ となる。以上のことから、M と（1-18）式の第 1 項は、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & c_{12}c_{22}{}^{-1} \\ 0 & 2 \\ 1 & -c_{12}c_{22}{}^{-1} \end{pmatrix} / 2, \quad M_2 l_2 = \begin{pmatrix} 1 + c_{22}{}^{-1}c_{12} \\ 2 \\ 1 - c_{22}{}^{-1}c_{12} \end{pmatrix} / 2$$

となり、その第 2 項の係数は、

$$I-M_2C^p=\begin{pmatrix}1 & -c_{22}{}^{-1}c_{12} & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & c_{22}c_{12} & 1\end{pmatrix}/2$$

とそれぞれ表わされ、さらに、

$$\hat{\omega}^*=\begin{pmatrix}\hat{\omega}_{11}\\ \hat{\omega}_{12}\\ \hat{\omega}_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(X'X)^{-1} & 0\\ O & (x_1'x_1)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X' & 0\\ O & x_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(X'X)^{-1}X'y_1\\ (x_1'x_1)^{-1}x_1y_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_{11}x_1'y_1+c_{12}x_2'y_1\\ c_{21}x_1'y_1+c_{22}x_2'y_1\\ \delta_2c_{22}{}^{-1}x_1'y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}\\ g_{12}\\ c_{22}{}^{-1}(c_{22}g_{21}-c_{21}g_{22})\end{pmatrix}$$

となる。ここで、ω^* の 1,2 番目の要素は（1-20）式から直接得られるが、3 番目の要素は、$c_{21}g_{22}-c_{22}g_{21}=(c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21})y_2'x_1=\delta_2x_1'y_2$ が計算されるのでこれを利用している。これらをまとめると、

$$\tilde{\omega}^*=\begin{pmatrix}1+c_{22}{}^{-1}c_{12}\\ 2\\ 1-c_{22}{}^{-1}c_{12}\end{pmatrix}/2+\begin{pmatrix}1 & -c_{22}{}^{-1}c_{12} & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & c_{22}{}^{-1}c_{12} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\omega}_{11}\\ \hat{\omega}_{12}\\ \hat{\omega}_{21}\end{pmatrix}/2$$

$$=\begin{pmatrix}1+g_{11}-g_{21}+c_{22}{}^{-1}c_{12}(1+g_{22}-g_{12})\\ 2\\ 1-g_{11}+g_{21}-c_{22}{}^{-1}c_{12}(1+g_{22}-g_{12})\end{pmatrix}/2$$

となる。このベクトルで表わされた結果を配分ウエイト行列の形に戻せば配分ウエイト行列が得られる。すなわち、

(1-23) $$\tilde{\omega}=\begin{pmatrix}1+g_{11}-g_{21}+c_{22}{}^{-1}c_{12}(1+g_{22}-g_{12}) & 2\\ 1-g_{11}+g_{21}-c_{22}{}^{-1}c_{12}(1+g_{22}-g_{12}) & 0\end{pmatrix}/2$$

となる。

２．既知の解を取り除いた配分ウエイトベクトルの推計

第 2 節では（1-14）式の ω において $\omega_{ij}\neq 0$ と $\omega_{ij}=0$ に分割したが、$\omega_{ij}=1$ が既知なものについては改めて計算する必要はない。本節では ω の分割を

$\omega_{ij}=0$ に加えて $\omega_{ij}=1$ も ω^{**} とすることでおこなう。そのため、(1-18) 式の左辺において必ずしも $\omega^{**}=0$ とはならないため、

(2-1) $$y - X_3^{**}\omega^{**} = y^c$$

とすれば、(1-18) 式は、

(2-2) $$y^c = X_3^*\omega^* + u$$

となる。(1-16) 式を制約条件とするときの (2-2) 式における $u'u$ の最小 2 乗法による解は (2-10) 式で得られる。ただし、

(2-3) $$\hat{\omega}^* = (X_3^*{}'X_3^*)^{-1}X_3^*{}'y^c$$

となる。

2.1　既知の解である 0 と 1 を取り除いた推計の具体例

前述した例を、$\omega' = \left(\begin{pmatrix}\omega_{11} & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\omega_{21} & 0\end{pmatrix}\right)$ と変更する。ω_1 は $\omega_{12}=1$ の要素を含むので I_2 から 2 行目を取り除き $P_1^* = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = e_1(2)'$ とし、その 2 行目を $P_1^{**} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = e_2(2)'$ とする。ω_2 には $\omega_{22}=0$ を含むため、同じように $P_2^* = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = e_1(2)'$、$P_2^{**} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = e_2(2)'$ となる。したがって、

$$P^* = \begin{pmatrix} e_1(2)' & \\ & e_1(2)' \end{pmatrix}, \quad P^{**} = \begin{pmatrix} e_2(2)' & \\ & e_2(2)' \end{pmatrix}$$

が得られ、$P' = \begin{pmatrix}P^*{}' & P^{**}{}'\end{pmatrix}$ となる。この P により ω は分割され、

$$\omega^p = P\omega = \begin{pmatrix} P^*\omega \\ P^{**}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^* \\ \omega^{**} \end{pmatrix}$$

から、$\omega^*{}' = \begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{21}\end{pmatrix}$、$\omega^{**}{}' = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ となる。ω^p のウエイト条件は P^* のみを利用して、

$$C^p = CP^*{}' = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1(2) & \\ & e_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(2) & e_1(2) \end{pmatrix}$$

となり、すべての行が 0 となる行を取り除くため、$C^p = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = l_2'$ が得られ、$C^p\omega^* = 1$ となる。ここで、ウエイトの個数は $m^* = 1$ であることに注意すること。同じようにして X_3 を求める。

$$X_3 = X_2P' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}P' = \left(\begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 & \\ & x_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} X_3^* & X_3^{**} \end{pmatrix}$$

また、(2-1) 式から、

$$y^c = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 & \\ & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となる。(2-10) 式から、

$$M = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \xi^{-1} / 2 = l_2 / 2$$

となる。

$$Ml_1 = l_2 / 2\,,\quad I - Ml_2' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} / 2$$

(1-3) 式から、$y_1'x_1 = \delta_2{}^{-1}(c_{22}g_{11} - c_{21}g_{12})$、 $y_2'x_1 = \delta_2{}^{-1}(c_{22}g_{21} - c_{21}g_{22})$ を利用すれば、(3-3) 式から、

$$\begin{pmatrix} \hat{\omega}_{11} \\ \hat{\omega}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1'x_1)^{-1}(x_1'y_1 - x_1'x_2) \\ (x_1'x_1)^{-1}x_1'y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} + c_{22}{}^{-1}(c_{12} - c_{21}g_{12}) \\ g_{21} - c_{22}{}^{-1}c_{21}g_{22}) \end{pmatrix}$$

となる。以上をまとめて、

$$\tilde{\omega}^* = l_2 / 2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{11} \\ \hat{\omega}_{21} \end{pmatrix} / 2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + g_{11} - g_{21} + c_{22}{}^{-1}(1 + g_{22} - g_{12}) \\ 1 - g_{11} + g_{21} - c_{22}{}^{-1}(1 + g_{22} - g_{12} \end{pmatrix} / 2$$

が求められる。このベクトルで表わされた結果を配分ウエイト行列の形に戻せば (1-23) 式に一致する。

2.2　一般的な配分ウエイト行列の制約条件付き最小 2 乗法

第 2 章の配分ウエイト行列の推計方法によれば、配分ウエイト行列を $m, n = 2$ のもとで対応関係における配分ウエイトのゼロ制約を $\omega_{22} = 0$ としたときのウエイト制約条件付き最小 2 乗法による解は、

(2-4) $$\tilde{W} = l_m l_n' / m + (I_m - l_m l_m' / m)\{\hat{W} + B(XX')^{-1}\}$$

と表わされる。ここで、ゼロ制約を構成する行列 B と $(XX')^{-1}$ を、

(2-5) $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 \end{pmatrix}$$

とする。配分ウエイトの 1 個が 0 であるときの解は ξ_1 を解くことで求められる。(2-2) 式は $\xi_{22} \neq 0$ であり、ξ において $\xi_4 \neq 0$ である。したがって、$S_2 = \{(2,2)\}$ なので、$S_\xi = \{4\}$ となり、

$$A \otimes C' = \begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

から、1,2,3 行と 1,2,3 列を同時に取り除けば、$A \otimes C'[4] = a_{22}c_{22} = (m-1)c_{22}$ となる。また、$h[4] = e_2(m)'\tilde{W}e_2(n) - 1 - mg_{22} + g_{\bullet 2}$ において、右辺の第 1 項は 0 となるので、$\xi_1 = \xi[4]$ の解は、$\xi_1 = \{(m-1)c_{22}\}^{-1}(-1 - mg_{22} + g_{\bullet 2})$ となる。$m = 2$ なので、

(2-6) $$\xi_1 = c_{22}^{-1}(g_{12} - g_{22} - 1)$$

となる。(2-6)式を(2-2)式へ代入して B が求められる。(2-1)式の右辺の第 2 項を計算すると、

$$I_2 - l_2 l_2'/2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}/2$$

であり、

$$B(XX')^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi_1 c_{21} & \xi_1 c_{22} \end{pmatrix}$$

となるので、これらをまとめて、

$$(I_2 - l_2 l_2'/2)\{\hat{W} + B(XX')^{-1}\} = \begin{pmatrix} g_{11} - g_{21} - \xi_1 c_{21} & g_{12} - g_{22} - \xi_1 c_{22} \\ -g_{11} + g_{21} + \xi_1 c_{21} & -g_{12} + g_{22} + \xi_1 c_{22} \end{pmatrix}/2$$

となる。したがって、$\tilde{W}$ は、

(2-7) $$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 1 + g_{11} - g_{21} + c_{21}c_{22}^{-1}(1 + g_{22} - g_{12}) & 2 \\ 1 - g_{11} + g_{21} - c_{21}c_{22}^{-1}(1 + g_{22} - g_{12}) & 0 \end{pmatrix}/2$$

と表わされる。(2-7)式は(1-23)式に一致する。

3．配分ウエイトベクトルによる推計のプログラム

配分ウエイト行列を行列のまま直接推計するのではなく、ベクトルへ変換して推計に必要でない要素を取り除いて推計する S_Plus あるいは R により書かれたプログラムの中で、既知の解である 0 を取り除いて推計するプログラムが dstb_wv6.sp、既知の解である 0 と 1 を共に取り除いて推計するプログラムが dstb_wv7.sp である。商品グループにおいて分類 A の個数を n、分類 B の個数を m とすれば、配分ウエイト行列 W は $m \times n$ 行列である。取引額のデ

ータの個数を k とする。推計のプログラムとして前者は dstb_wv6.sp(X,Y,W)、後者は dstb_wv7.sp(X,Y,W)として示され、それぞれ 3 つのパラメターを必要とする。パラメターの X は分類 A の取引額の構成比であり $n\times k$ 行列、Y は分類 B の取引額の構成比であり $m\times k$ 行列、W は A から B への方向に対する配分ウエイト行列であり、要素の $\omega_{ij}\neq 0$ を 1 と置き換えた行列である。両プログラムとも外部プログラムの diag_p4.sp と dstb_wv5.sp を利用している。

3.1　既知の解である 0 を取り除いたベクトルの推計

既知の解である 0 を取り除き、1 を含むベクトルを推計するプログラムの dstb_wv6.sp は（2-7）式をウエイト条件とした（2-9）式の u に関する最小 2 乗の解を求めることを目的としている。このプログラムは W において 1 の部分のみをベクトルに置き換えて推計する。dstb_wv6.sp のプログラムは以下に示されている。

```
#--------------------------------------------------------------------*
#                          dstb_wv6.sp                               |
#--------------------------------------------------------------------*
function(X,Y,W){
     s<-c(1:length(W))[c(t(W))>0]
     y<-matrix(t(Y),length(Y),1)
     X3<-diag_p4.sp(t(X),nrow(W),1)[,s]
     C3<-diag_p4.sp(diag(n2<-ncol(W)),nrow(W),0)[,s]
#
     s<-c(t(W))
     s[s>0]<-dstb_wv5.sp(X3,y,C3)
     W<-t(W<-matrix(s,ncol(W),byrow=FALSE))
     W
}
```

このプログラムは 2 つのブロックから構成されている。最初のブロックにおいて W の中から 1 の要素を取り出すためのベクトルが s である。行列 Y をベクトル y へ変換する。（2-8）式の X_3^* が X3、（2-6）式の C^p が C3 である。この X3 と C3 の作成には外部プログラム diag_p4.sp を必要とする。dstb_wv6.sp において diag_p4.sp は影を付けて示されている。diag_p4(A,k,m)は以下に示されているように、

```
#--------------------------------------------------------------------*
#                          diag_p4.sp                                |
#--------------------------------------------------------------------*
function(A,k,m){
```

```
      d<-dim(A)
      X<-matrix(0,d[1]*(1+m*(k-1)),d[2]*k)
      for(i in (0:(k-1))) {
        X[(1:d[1])+i*d[1]*m,(1:d[2])+i*d[2]]<-A
      }
      X
}
```

であり、diag_p4.sp(A,k,m)として 3 個のパラメターを持つ。m=1 のときは対角要素に k 個の行列 A を置き、その他の要素が 0 となる行列 X を作成する。すなわち、

$$X = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix}$$

である。m=0 のときは、k 個の A を横に並べた行列の $X = \begin{pmatrix} A & \cdots & A \end{pmatrix}$ を作成する。前者から（2-2）式の X_2、後者から（2-3）式の C を作成できる。

dstb_wv6.sp の 2 番目のブロックはベクトルによる推定値として（2-7）式のウエイト条件のもとで（2-9）式のベクトル ω^* を推計することを目的としており、dstb_wv5.sp(X,y,C) によって得られる。dstb_wv6.sp において dstb_wv5.sp は影を付けて示されている。dstb_wv5.sp の内容は、

```
#-------------------------------------------------------------------*
#                          dstb_wv5.sp                              |
#-------------------------------------------------------------------*
function(X,y,C){
      w2<-(X2<-solve(t(X)%*%X))%*%t(X)%*%y
      M<-X2%*%t(C)%*%solve(M<-C%*%X2%*%t(C))
      m<-nrow(M)
      M3<-diag(m)-M%*%C
      w<-M%*%matrix(1,ncol(M),1)+M3%*%matrix(w2,m,1)
      w
}
```

である。ここで、パラメターの X,y,C は（2-9）式の X_3^*, ω^*, C^p にそれぞれ対応している。dstb_wv5.sp において（2-12）式の $\hat{\omega}^*$ が w2、（2-10）式の M が M、（2-11）式の $I - MC^p$ が M3 である。求めたいベクトルによる解が（2-11）式の $\tilde{\omega}$ であり、これは w で表わされる。dstb_wv6.sp の 2 番目のブロックの最後はベクトルによる解を W の 1 の要素へ代入して行列 W と変換しており、この W が求める行列表示による解である。

3.2　既知の解の 0 と 1 を取り除いたベクトルの推計

既知の解の 0 と 1 を取り除いたベクトルに対する推計のプログラム dstb_wcv7.sp(X,Y,W)は 3 つのパラメターをもち、この中の W において既知の解である 0 と 1 を取り除いた残りの未知の解に対して 2 とする。プログラム dstb_wv7.sp は（2-7）式をウエイト条件とした（3-2）式の u に関する最小 2 乗の解を求めることを目的としており、W において 2 の部分のみをベクトルにして推計するプログラム dstb_wv7.sp の内容は以下に示されている。

```
#-------------------------------------------------------------*
#                         dstb_wv7.sp                         |
#-------------------------------------------------------------*
function(X,Y,W){
     c2<-c(1:length(c<-apply(W,2,sum)))[c!=1]
     W[,c2][W[,c2]==1]<-2
#
     y<-matrix(t(Y),length(Y),1)
     s<-c(1:length(W))[c(t(W))==1]
     if (length(s)>0) {
       X3<-(X2<-diag_p4.sp(t(X),nrow(W),1))[,s]
       X2<-matrix(X3,nrow(X2),byrow=FALSE)
       y2<-y-apply(X2,1,sum)
     }
     else y2<-y
#
     s<-c(1:length(W))[c(t(W))==2]
     X3<-(X2<-diag_p4.sp(t(X),nrow(W),1))[,s]
     X<-matrix(X3,nrow(X2),byrow=FALSE)
     C<-diag_p4.sp(diag(n2<-ncol(W)),nrow(W),0)[,s]
     s2<-apply(W,2,sum)
     C<-matrix(C[s2!=1,],ncol=ncol(X),byrow=FALSE)
#
     s<-c(t(W))
     s[s==2]<-dstb_wv5.sp(X,y2,C)
     W<-t(W<-matrix(s,ncol(W),byrow=FALSE))
     W
}
```

このプログラムは 4 つのブロックから構成されている。最初のブロックにおいて要素が $\omega_{ij}=0$ のときは 0、$\omega_{ij}=1$ のときは 1、それ以外は 2 となるような行列 W を作成する。第 2 ブロックにおいて解が 1 であるベクトルを取り出すためのベクトルが s である。行列 Y をベクトル y へ変換する。W の中に 1 の要素が存在しているときは (3-1) 式の y^c を計算する必要があり、X_3^{**} に

おいてω^{**}に含まれている 1 と対応する列のみから構成される行列を取り出し X2 として作成する。(3-1) 式からy^cはこの X2 の行の要素の和で求められる y2 である。W の中に 1 の要素が存在しないときはy^cは y そのものでありこれを y2 とする。

dstb_wv7.sp は W の中にある 2 の要素のみを推計するために外部プログラムの dstb_wv5.sp(X,y2,C)を利用するが、第 3 のブロックではそのための準備としてパラメターとなる X,y2,C を作成する。dstb_wv7.sp のプログラムにおいて dstb_wv5.sp は影で示されている。W から 1 を含む列を取り除いた行列 W2 を作成し、2 の要素を 1 に置き換える。これで W に替わって W2 が推計する行列となる。したがって、1 を解として含まないベクトルの解は dstb_wv5.sp(X,Y2,W2)として求めることができる。第4ブロックはdstb_wv5.spから求められたベクトルの解をWの要素が2の箇所へ置き換えることで行列による解を W として作成する。

3.3　配分ウエイトベクトルの推計値が負のときの調整

本章の方法はウエイトの制約条件として等号を採用しているため、推計値に負の値が計算されるのを制御できないという問題を抱えている。本章では第 1 章の dstb_wm9.sp とまったく同じ負の調整方法を採用している。推計された負の値は以下のようにして調整される。

［1］dstb_wv7.sp により推計された配分ウエイト行列を W2 とする。すなわち、W2<-dstb_wv7.sp(X,Y,W)とする。W2 に負の推定値が含まれてなければこの W2 が最終的な配分ウエイトの推定行列となる。W2 に負の推定値が含まれていれば［2］を処理する。

［2］W2 の中で絶対値が最大となる負の推定値と同じ位置にある W の要素を 0 と置き、X,Y を変更せずに［1］を実行する。

この処理を繰り返すことで負の推定値がなくなり、ウエイトの正の制約条件を満足する配分ウエイト行列の解が得られる。配分ウエイトの推計値が負のときの調整をしたプログラムが dstb_wv8.sp である。dstb_wv8.sp のプログラムは以下に示される。

```
#-----------------------------------------------------------*
#                        dstb_wv8.sp                        |
#-----------------------------------------------------------*
```

```
function(X,Y,W){
      W2<-dstb_wv7.sp(X,Y,W)
      W2[abs(W2)<0.0000001]<-0
      m<-0;
      while (sum(W2<0)>0 & m<99) {
        W[W2==min(W2)]<-0
        W2<-dstb_wvc7.sp(X,Y,W)
        W2[abs(W2)<0.0000001]<-0
        m<-m+1
      }
      W2
}
```

dstb_wv8.sp は影で示されているように外部プログラムとして dstb_wv7.sp を利用している。このプログラムの最初のステップは負の推計値を含む配分ウエイトの推計計算である。推計された配分ウエイト行列が W2 である。推計値は浮動小数点で表示されているため 0 は 0 に近い実数で表示されている。これを 0 に置き換えているのが、W2[abs(W2)<0.0000001]<-0 である

第 2 のステップでは負の推計値がなくなるまで W の要素を 0 に置き換える繰り返し計算をおこなう処理である。W2 の負の推定値の個数は sum(W2<0) により求められる。最小値の位置する場所の W を 0 に置き換えるのが W[W2==min(W2)]<-0 である。繰り返しの回数はプログラムの暴走を考慮して W2 に含まれる推定値がなくなるかまたは最大 98 回までとしている。出力は 0 を置き換えるたびごとに推計された W2 を書き出している。

おわりに

本章ではまず最初、配分ウエイト行列の要素に 0 が含まれる一般的な配分ウエイトを線形回帰式に変換し、配分ウエイトベクトルのウエイト制約による制約条件付き最小 2 乗法を紹介し、さらに配分ウエイトベクトルの既知の値である 0 と 1 を取り除いたベクトルに対してウエイトの制約条件付き最小 2 乗法による解を求めている。本章で求めた配分ウエイトベクトルに置き換えた推計方法と第 2 章の配分ウエイト行列を行列のまま直接推計する方法とは m,n=2 とするとき解析的には同じ解を持つことが確かめられる。前者による方法にもとづく SPlus あるいは R によるプログラムは dstb_wv7.sp として作成されている。

第 2 章と同じように制約条件として本章では等号のみであり、不等号は採

用していない。推定値が負の値のときは推定値の絶対値が最大であるものを 0 に置き換え、負の推定値がなくなるまでこの推定方法を繰り返して調整するという方法を採用している。推定値の負の調整を含めた配分ウエイトの推計プログラムが dstb_wv8.sp である。このプログラムの具体例は示さなかったが、第 2 章の dstb_wm9.sp の結果とはもちろんまったく同一である。しかし、第 2 章で述べたように負の推定値の調整法はいくつかの検討すべき内容を含んでおり、今後の課題として残されている。

【参考文献】

［1］野田容助「商品分類の改訂に伴う貿易統計の変換－日本および韓国を例として－」（野田容助編『商品分類の改訂に伴う貿易統計の変換』統計資料リーズ（SDS）No.83 アジア経済研究所 2001）

［2］―――「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計―SITC-R1 系列の 3 桁レベル分類コード作成に向けて―」（野田容助編『貿易指数の作成と応用―東アジア諸国・地域を中心として―』統計資料リーズ（SDS）No.87 アジア経済研究所 2003）

［3］―――「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計方法」（野田容助編『東アジア諸国・地域の貿易指数―作成から応用までの基礎的課題―』統計資料リーズ（SDS）No.88 アジア経済研究所 2005）

［4］―――「分類統一のための配分ウエイト行列の推計－ウエイト既知値を等号制約条件付とする最小 2 乗法－」（野田容助・黒子正人編『長期時系列における貿易データと貿易指数の作成と応用』調査研究報告書 開発研究センター2005-Ⅱ-04 アジア経済研究所 2006）

［5］野田容助・深尾京司「同一商品分類に変換された貿易額の比較－配分ウエイトにおける推計方法の違いを考慮して－」（野田容助・黒子正人編『長期時系列における貿易データと貿易指数の作成と応用』調査研究報告書 開発研究センター2005-Ⅱ-04 アジア経済研究所 2006）