第６章

動学的シミュレーション・モデル構築の基礎

小山田和彦

要約：

本章では、多地域多部門世代重複型シミュレーション・モデル開発の一環として、静学的な応用一般均衡モデルを完全予見型動学モデルとして拡張する際にコアとなる部分について、モデルの設定方法やパラメータ値の導出方法などの解説を行う。まず、マクロ経済学のテキストに見られるもっとも基礎的な無限期連続型の Ramsey モデルについて紹介し、モデルを数値プログラム化する際に利用する Time Elimination 法や分析対象となる経済の挙動を特徴づけるパラメータ値を実際のデータから導出する際に利用するカリブレーション法について概要を示す。そして、分析の最初のステップとして定常状態における経済の性質を確認することが必要であるために、モデルの複雑化や政策シナリオの表現などの面で課題を抱えていることに触れる。次に、無限期連続型 Ramsey モデルが抱える欠点を克服するための方法として有限期離散型モデルへの転換を提案し、その方法と注意点について整理する。そして、無限期モデルにおける終端期条件が有限期モデルにおける最終期を無限期先に設定したものにすぎないことを指摘するとともに、最終期の設定によって無限期モデルへの近似誤差をコントロールすることが可能であることを示す。また、基準年において経済が定常状態にないことを仮定してパラメータ値の導出を行う方法と、定常状態にあることを仮定した場合の方法の両方について解説し、定常状態にあることを仮定して得たパラメータ値を利用することで、プログラムのデバッギング作業時にかかる負担を軽減することが可能であることを述べる。

キーワード：

応用一般均衡分析　完全予見型動学モデル　カリブレーション　Time Elimination

はじめに

本研究プロジェクトでは、現在、分析の際に利用する多地域多部門世代重複型シミュレーション・モデルの開発を行っている。「時間とともに変化する各国の人口構成のもとで開発途上国における人口ボーナスを最大化するように各国が協力し、人口構成の局面が異なる国の間での貿易・資本移動をとおして世界経済全体が持続的な発展を実現できるような枠組みを提案する」という目的を果たすため、数値シミュレーションを利用して分析を行うことを選択した経緯については序章に記されている通りである。特に、分析対象として開発途上国を含む複数の国・地域をカバーする必要があるため、大量の時系列データを必要とするマクロ計量モデルではなく、経済主体の最適化行動などに関する理論モデルをベースに限られたデータのもとで分析を行うことが可能な、いわゆる「応用一般均衡（Applied General Equilibrium: AGE）モデル」型の分析ツールが選択されている。モデル構築の際、貿易自由化や経済統合などの経済効果を分析する際に近年しばしば利用される静学的な AGE モデルをもとに前述の目的を果たすための分析を行うことができるような拡張が加えられることになるが、その中でももっとも重要なポイントは「完全予見」を仮定した動学モデル化であろう。本章では、シンプルではあるが完全予見型の動学モデルを構築する際にコアとなる部分について、メモの形にまとめておきたい。

まず第１節では、マクロ経済学のテキストに見られるもっとも基礎的な連続型の「Ramsey モデル」の概要、同モデルを数値プログラム化する際に利用する「Time Elimination」法、そして「カリブレーション（Calibration）」法を利用したパラメータの導出について解説する。第２節では、第１節でみた分析手法の欠点を克服するための方法として、Ramsey モデルを離散型で定式化するとともに分析期間を無限期から有限期に変更して近似する方法について整理する。

1. 連続型 Ramsey モデル

本節では、マクロ経済学のテキストで最初に紹介される、もっとも基礎的な完全予見型動学モデルである「Ramsey モデル」について解説する。まずモデルを設定することから始め、そこから経済の動学システムを表現する２本の連立微分方程式を導出するとともに、どのように分析が行われるのかを紹介する。その後、無限期間モデルを数量的に解く際に利用するテクニックのひとつである「Time Elimination」法、および分析対象となる経済の挙動を特徴づける「パラメータ」値を実際のデータから導出する方法のひとつである「カリブレーション（Calibration）」法について見ていくことにしたい。

1.1 モデルの設定

Ramsey モデルは Ramsey [1928]によって開発され、Cass [1965]や Koopmans [1965]らによって精緻化が進められた理論モデルであり、無限期間生存する個人がどのように消費と投資（貯蓄）の流列を決定すれば自らの厚生水準を最大化することができるのか示すものである。もっとも単純なモデルの設定を見てみよう。

分析対象とする経済には人口L_tの無限期間生存する同質的な個人（代表的個人）が存在し、毎期の貯蓄によって資本K_tの蓄積を行うとともに、その資本K_tと労働L_tを投入して生産が行われているものとする[1]。生産技術をCobb-Douglas型であると仮定すると、生産関数を以下のように記述することができる。

$$Y_t = \phi {K_t}^{\alpha} {L_t}^{1-\alpha} \qquad [\,1\,]$$

Y_tは生産量、ϕは単位係数、そしてαは資本の投入シェアで $0 < \alpha < 1$ を満たす。ϕは時間を通して一定であり、技術進歩は考慮されない。他方、人口L_tは成長率γで毎期増加するものとする。

$$L_t = L_0 \mathrm{e}^{\gamma t}$$

L_0は基準年における人口である。ここで[1]式の両辺をL_tで除し、一人当たりのタームに書き換えると次のようになる。

$$y_t = \phi {k_t}^{\alpha} \qquad [\,2\,]$$

ただし、$y_t \equiv Y_t \,/\, L_t$ 、$k_t \equiv K_t \,/\, L_t$である。

資本K_tは毎期の生産額（所得）から消費額を差し引いた貯蓄をもとに蓄積され、資本減耗によって目減りする。それを一人当たりのタームで記述すると、以下のようになる。

$$\dot{k}_t = y_t - c_t - (\delta + \gamma) k_t \qquad [\,3\,]$$

ここで、$\dot{k}_t \equiv \mathrm{d}k_t \,/\, \mathrm{d}t$であり、$c_t$は一人当たり消費量、$\delta$は資本減耗率である[2]。人口が成長しているため、一人当たり資本ストックは資本減耗分δk_tとは別に毎期γk_tずつ目減りする。

---

[1] 下付き添え字 t は変数が時間の変数であることを示す。

[2] 生産財（消費財）がニュメレールに設定されているため、財価格は 1 で固定されている。

次に、代表的個人の厚生水準は、時間選好率ρのもとで各期の消費から得られる瞬時的効用u_tの割引現在価値の総和によって定義される。瞬時的効用関数を弾力性一定（Constant Elasticity of Substitution: CES）型であると仮定すると、以下のようになる。

$$\int_0^\infty u_t\ \mathrm{e}^{-\rho t}\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{{c_t}^{1-\theta}-1}{1-\theta}\ \mathrm{e}^{-\rho t}\ \mathrm{d}t \qquad [4]$$

θは異時点間の代替弾力性の逆数である。

この経済の目的は、[２]式および[３]式を制約として[４]式で与えられる代表的個人の厚生水準を最大化するように、各期の消費c_t、生産量y_t、および資本ストックk_tの水準を決定することである。その際、[２]式および[３]式によって生産物価格p_t^yと資本価格p_t^kが決定される。ただし、この問題を解くためには、資本ストックの初期値k_0が与えられるとともに、横断面条件（Transversality Condition: TVC）が満たされる必要がある。それは、無限期先で資産を使い果たすように消費と貯蓄（投資）の計画を立てることを意味する条件式であり、以下のようなものである。

$$\lim_{t\to\infty} p_t^k\, k_t \mathrm{e}^{-(\rho-\gamma)t} = 0 \qquad [5]$$

1.2 経済の動学システム

1.1 で設定した問題に関する最適化のための一階条件、および[２]式から以下のような消費c_tに関する動学方程式を導出することができる。

$$\dot{c}_t = \frac{c_t}{\theta}\left(\alpha\phi {k_t}^{\alpha-1} - \delta - \rho\right) \qquad [6]$$

さらに、[３]式に[２]式を代入すると以下を得る。

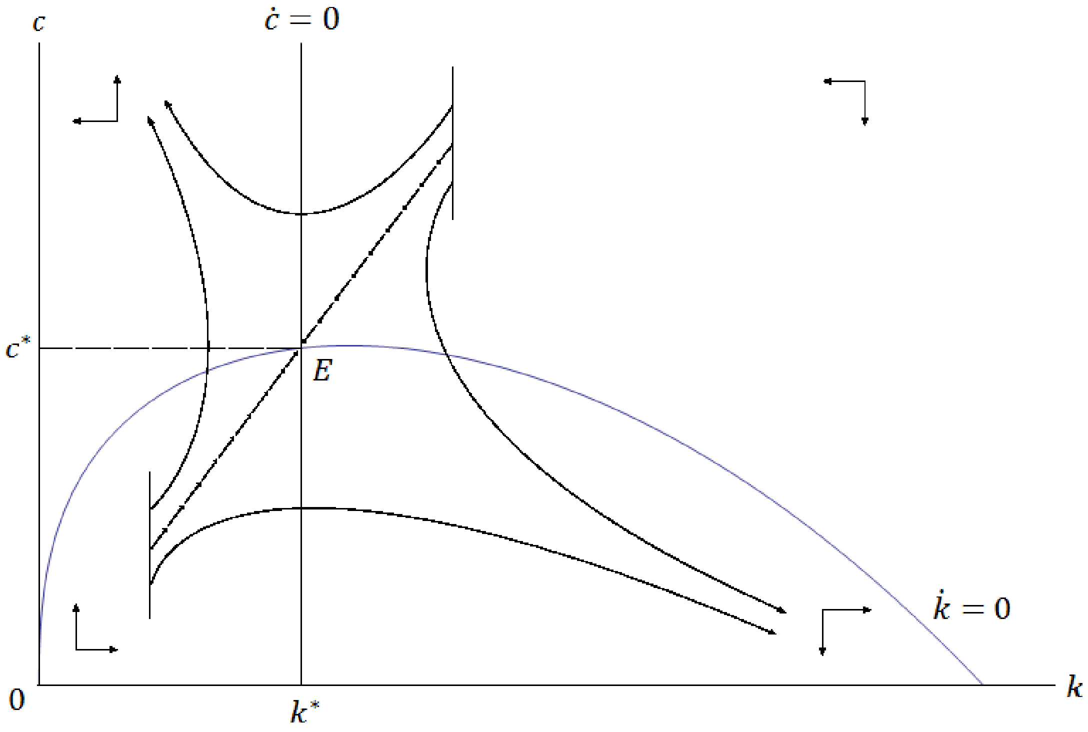
$$\dot{k}_t = \phi {k_t}^{\alpha} - c_t - (\delta+\gamma)k_t \qquad [7]$$

これら[６]式および[７]式からなる２本の連立微分方程式体系によって、この経済の動学システムが記述されることになる。なお、定常状態では$\dot{c}_t = \dot{k}_t = 0$が成立し、均衡点はユニークに決まる鞍点となる。

以上の動学的均衡経路を描いたものが図１の位相図である。資本ストックの初期値k_0が与えられると、それに対応して定常均衡点Eに至る経路上に消費c_0の値が決まる。その後、時間の経過とともにこの経済は定常均衡点Eに向かって成長していくことになる。c^*およ

びk^*は、それぞれ定常状態における消費および資本ストックの水準である。

図１　動学的均衡経路



（出所）筆者作成。

この位相図を利用してどのように分析が行われるのか、簡単に紹介しておきたい。たとえば、現在ヨーロッパで進行中の PIIGS（ポルトガル・アイルランド・イタリア・ギリシャ・スペイン）問題のケースで見られるように、巨額の財政赤字の累積などを理由として、国際的な信用格付けにおいて分析対象国の政府が発行する国債が格下げされたとしよう。国債の格付けが引き下げられると、国債価格が下落して利回りが高くなり、その結果として長期金利が上昇する傾向がある。利子率が上昇して時間選好率ρを上回るような状況では、人々は借入れを減らして貸出しを増やそうとする。したがって、銀行や企業への貸出しである貯蓄を増やすことによって、現在の消費を減らすとともに将来の消費を増やそうとすることになる。現状のシンプルなモデルでは利子率が明示的に取り扱われていないため、そのような状況を時間選好率ρの低下として近似する。

[６]式および[７]式のうち時間選好率ρが含まれているのは[６]式のみであることより、[６]式を利用して$\dot{c}_t = 0$を導出すると以下のようになる。

$$k^* = \left(\frac{\delta+\rho}{\alpha\phi}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad [8]$$

これより$\mathrm{d}k^*/\mathrm{d}\rho < 0$を得る。したがって、時間選好率$\rho$が低下する状況では、$\dot{c}_t = 0$（$k^*$）は右方向にシフトすることが分かる。この場合、新しい定常均衡点は以前の均衡点の右方に位置することになるため、以前の均衡点の下方に消費がジャンプ（つまり消費が減少）した後、右上方に位置する新しい均衡点に向かって消費と資本ストックが徐々に増加していく。そして、新しい均衡点における資本ストックの量は、以前の均衡点における量よりも多くなる。

1.3 家計と企業の分離

これまでの設定では、生産量y_tや資本ストックk_tの流列は代表的個人の厚生水準を最大化するように選択されていた。ここでは、家計と企業を分離し、それぞれの経済主体が個別に最適化を行うような状況について考えてみよう。家計と企業を分離した場合、家計は自らの厚生水準を最大化するように各期の消費と貯蓄の水準を決定し、企業は自らの価値（企業価値）を最大化するように各期の生産と要素投入、設備投資の水準を決定する。

まず、企業の目的関数を設定しよう。それは、以下のように記述できる。

$$\int_0^\infty (y_t - w_t - i_t)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t (r_s-\gamma)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \qquad [9]$$

w_tは賃金率、i_tは労働者一人当たりのタームに直した設備投資額、r_tは利子率であり、sはtと同様に時間を指す。[９]式は、各期の売上げから賃金支払いおよび設備投資額を差し引いた残りを割引現在価値に直し、無限の将来にまで集計したものであり、通常、「企業価値」と呼ばれる。株式会社の場合、この企業価値を発行株式数で割ったものがその企業の株価となる。

資本蓄積に関する関係式[３]および TVC[５]が以下のように変更される。

$$\dot{k}_t = i_t - (\delta+\gamma)k_t \qquad [10]$$

$$\lim_{t\to\infty} p_t^k\, k_t \mathrm{e}^{-\int_0^t (r_s-\gamma)\mathrm{d}s} = 0 \qquad [11]$$

企業の問題は、[２]式、[10]式、および[11]式を制約として[９]式で与えられる企業価値を最大化するように、各期の生産量y_t、設備投資i_t、および資本投入量k_tの水準を決定することである。[２]式および[10]式によって生産物価格p_t^yと資本価格p_t^kが決定される点に

変化はない。この問題に関する最適化のための一階条件を導出し、組み合わせると以下を得る。

$$r_t + \delta = \alpha\phi {k_t}^{\alpha-1} \quad [12]$$

さらに、Cobb-Douglas 型の生産技術を仮定しているため、各期の利潤はゼロとなる。

$$w_t = y_t - (r_t + \delta)k_t \quad [13]$$

それでは、家計について考えてみよう。家計の目的関数は代表的個人の目的関数である[4]式と同じである。ただし、以下の関係式にしたがって資産の蓄積（貯蓄）を行う。

$$\dot{a}_t = (r_t - \gamma)a_t + w_t - c_t \quad [14]$$

a_tは一人当たり資産額であり、[14]式によって資産価値λ_tが決まる。したがって、資産a_tに関する TVC は次のようなものとなる。

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t\, a_t \mathrm{e}^{-(\rho-\gamma)t} = 0 \quad [15]$$

家計の問題は、[14]式および[15]式を制約として[4]式で与えられる厚生水準を最大化するように、各期の消費c_tおよび資産の蓄積水準a_tを決定することである。この問題に関する最適化のための一階条件を導出し、組み合わせると以下を得る。

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta} \quad [16]$$

続いて、市場における需給均衡を定義しよう。企業の問題に関する最適化のための一階条件より資本価格p_t^kが 1 となることが分かるため、資本市場均衡は次のようになる。

$$a_t = k_t \quad [17]$$

他方、財市場に関しては、ワルラス法則（Walras' Law）が成立するため自動的に需給が均衡する。したがって、剤市場の均衡条件をモデルに明示的に含める必要はない。

[2]式、[12]式から[14]式、[16]式、そして[17]式を利用すると、最終的に[6]式および[7]式と同じものが導出できる。したがって、今回のような方法で企業と家計を分離したとし

ても、経済の動学システムには全く影響を与えない。
　それでは、これまで見てきたような無限期間のモデルを数量的に解く方法について紹介しよう。

1.4 Time Elimination 法を利用した数値的解法

　ここでは、無限期間モデルを数量的に解く方法のひとつとしてMulligan and Sala-i-Martin [1991]が開発した、Time Elimination法の内容について紹介したい[3]。
　[７]式を利用してc^*を導出すると、以下のようになる。

$$c^* = \phi k^{*\alpha} - (\delta + \gamma)k^* \qquad [18]$$

　次に[６]式から[８]式まで、および[18]式を利用して得ることのできる、kに関する以下のような微分方程式を満たす政策関数$c(k)$について考える。

$$c'(k) \equiv \frac{\dot{c}}{\dot{k}} = \frac{c(k)}{\theta} \cdot \frac{\alpha\phi k^{\alpha-1} - \delta - \rho}{\phi k^{\alpha} - c(k) - (\delta+\gamma)k} \qquad [19]$$

[19]式は、図１において定常均衡点Eに向かう経路の傾きである。この政策関数について、定常状態に入る瞬間の値について考えよう。それは、l'Hopital の定理を利用して次のように導出することができる。

$$c'(k^*) = \lim_{k \to k^*} c'(k) = \frac{c(k^*)}{\theta} \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\phi k^{*\alpha-2}}{\alpha\phi k^{*\alpha-1} - c\prime(k^*) - \delta - \gamma} \qquad [20]$$

[８]式と[20]式より、以下を得る。

$$c'(k^*) = \frac{\rho - \gamma + \sqrt{(\rho-\gamma)^2 - \frac{4}{\theta}c^*\alpha(\alpha-1)\phi k^{*\alpha-2}}}{2} \qquad [21]$$

[21]式は、定常状態に入る直前の経路の傾きを示している。与えられたパラメータ値のもとで、まず[８]式よりk^*が決まり、それを[18]式に代入することによってc^*が決まる。コンピュータなどを利用しながら、与えられた資本ストックの初期値k_0をもとに[19]式にした

3 以後、下付き添え字 t は特別に必要な場合を除いて省略する。

がって経路の傾きを計算し、先ほど得られたk^*およびc^*を[21]式に代入して得られた値になるまで計算を繰り返すことで、cおよびkに関する一連の値を得ることができる[4]。

1.5 カリブレーションによるパラメータ値の導出

次に、所与のデータから分析対象とする経済の挙動を特徴づけるパラメータ値を導出する方法を紹介したい。パラメータ値導出の際には、おもに統計学に基づく方法を利用するのが一般的であるが、大量のデータを用意する必要があるため、入手可能なデータが限られていることの多い開発途上国を含む複数の国・地域をカバーする研究では問題が生じやすい。序章でも触れられているように、本研究プロジェクトでは、限られたデータのもとで（経済主体の最適化行動などの）理論に基づいてパラメータ値などを導出する、「カリブレーション」と呼ばれる手法を利用する。ここでは、上記の Ramsey モデルに関するパラメータ値をカリブレーション法によって導出してみよう。

上記のモデルにおいて、値を外生的に与える必要のあるパラメータおよび外生変数には、①資本ストックの初期値k_0、②生産関数における単位係数ϕ、③生産関数における資本の投入シェアα、④資本減耗率δ、⑤時間選好率ρ、⑥異時点間の代替弾力性の逆数θ、⑦人口成長率γの 7 種類ある。このうち、カリブレーションによって導出されるパラメータは①から③までの 3 種類であり、これらを導出するためには基準年に関する⑧一人当たり所得y_0および⑨利子率r_0に関するデータが必要となる。④から⑨までの 6 種類の値に関しては、公表されている統計資料や実証分析を行っている先行研究などを探して利用する。

Ramsey モデルでは貨幣市場が明示的に取り扱われておらず、したがって相対価格に関する情報しか取り扱いことができないため、基準年における初期時点での賃金率wを 1 と設定する。そのうえで[12]式を[13]式に代入し、整理すると③を得る。

$$\alpha = \frac{y_0 - 1}{y_0} \qquad [22]$$

次に[12]式より①が計算できる。

$$k_0 = \frac{\alpha y_0}{r_0 + \delta} \qquad [23]$$

---

4 定常状態に入る直前の経路の傾きを利用する関係上、Time Elimination 法は初期値から定常均衡への「単調な移行」しか取り扱うことができない。たとえば、定常均衡に向かって渦を巻くように近づいていくようなケースでは、経路上に同じ傾きを持つ部分が複数存在することになる。このようなケースに対しては、Brunner and Strulik [2002]が開発した「Backward Integration」法などが有用である。Roe, Smith and Saracoglu [2010]第 9 章などを参照してほしい。

最後に[２]式の生産関数より②が得られる。

$$\phi = \frac{y_o}{{k_0}^{\alpha}} \qquad [24]$$

以上、もっとも基礎的な完全予見型動学モデルである連続型の Ramsey モデルについて紹介した。ただし、分析を始める際には最初のステップとして状態変数（State Variable）k^*および操作変数（Control Variable）c^*の定常均衡値を導出することが必要であり、モデルを複雑化して現実に近づけたい場合にはすぐに限界に直面してしまう可能性が高い。また、Time Elimination 法などを利用した数量的な分析の際には、たとえば一時的な政策変更の効果を分析する際など、単純なシナリオをシミュレートするために何度も異なる初期値やパラメータ値のもとで計算作業を行うことが必要となるケースも少なくない。次節では、本節でみた分析手法の欠点を克服するための方法を紹介する。

2. 離散型 Ramsey モデル

前節で紹介した分析手法から明らかなように、理論モデルを利用した分析は、政策変化など何らかのショックが発生する以前の定常均衡からショック発生後の新しい定常均衡への移行経路がどのようなものとなるのかを考察するものが多く、定常状態に関する情報を導出することから分析がスタートする。Time Elimination法などを利用した数量的な分析であっても、まず定常均衡値を導出することが分析の出発点となっているためにモデルを複雑化することが容易でなく、政策シナリオを表現することにも多くの作業や工夫が必要となる。本節では、数値シミュレーションを行うことを前提に、計算プログラムのなかで時間を明示的に取り扱うとともに最適化のための一階条件だけを利用してモデルを解くことによって政策シナリオと計算の対応を１対１のものとし、一時的な政策変化などを容易に取り扱うことを可能にするための方法について解説する。その方法とは、Ramseyモデルを離散型で定式化し、分析期間を無限期から有限期に変更して近似する方法である[5]。

2.1 連続型無限期モデルから離散型有限期モデルへの変換

[5] 動的計画法（Dynamic Programming: DP）を利用すれば、無限期の分析期間を離散型の Ramsey モデルで取り扱うことが可能である。ただしその場合、状態評価関数（State Evaluation Function）を導出するための追加的（かつ困難な）作業が必要となる。

早速、モデルを設定していこう。まず、企業を要素投入および生産に関する意思決定を行う生産部と将来にわたる投資計画を行う投資部の二つに分ける。

生産部では、[１]式で与えられる生産技術のもとで、利潤を最大化するように各期の生産量および要素投入量が決定される。それは、以下の問題として定式化できる。

[企業（生産部）の問題]

Max $\quad p_t Y_t - w_t^K K_t - w_t^L L_t$

s.t. $\quad Y_t = \phi {K_t}^{\alpha} {L_t}^{1-\alpha}$ （[１]）

p_tは生産された財の価格、w_t^Kは資本へのリターン、w_t^Lは賃金率である。[１]式で決まるのは、p_tと同様の生産財価格p_t^Yである。目的関数は利潤を表し、売上げから資本設備へのレント支払いおよび労働者への賃金支払いを差し引いたものとして定義されている。この問題に関する最適化のための一階条件は、以下のようになる。

$$p_t - p_t^Y = 0 \quad [25]$$

$$\alpha p_t^Y Y_t - w_t^K K_t = 0 \quad [26]$$

$$(1-\alpha) p_t^Y Y_t - w_t^L L_t = 0 \quad [27]$$

[25]式から[27]式によって決まる変数は、それぞれ生産量Y_t、資本投入量K_t、労働投入量L_tである。

次に、投資部について考えよう。投資部は、企業価値を最大化するように、各期の資本ストック$\widehat{K}_t$および設備投資I_tの流列を決定する。前節でみたモデルと同様に、分析期間を無限期に設定した場合の問題は以下のようになる。

[企業（投資部）の問題：変更前]

Max $\quad \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ \left(\prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+r_s} \right) \left(w_t^K \widehat{K}_t - p_t I_t \right) \right\}$

s.t. $\quad \widehat{K}_t = I_{t-1} + (1-\delta) \widehat{K}_{t-1}$ [28]

$\quad \lim_{t\to\infty} \left\{ \left(\prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+r_s} \right) p_t^K \widehat{K}_t \right\} = 0$ [29]

目的関数は企業価値であり、前節における[９]式に対応している。同様に、[28]式は資本蓄積に関する関係式で[10]式、[29]式は TVC で[11]式にそれぞれ対応している。[28]式では資本価格p_t^Kが決まることになる。$\widehat{K}_t$は資本ストックであり、資本の供給側と考えてほしい。他方、生産部の問題に現れるK_tは生産への資本投入量であり、資本の需要側となる。

ここで、ひとつの問題が生じる。数値シミュレーション・モデルとして時間を明示的に取り扱うということは、無限期間にわたって変数の値を計算することを意味する。コンピュータを利用して永遠に計算を続けることは不毛であるため、ここで分析期間を有限期に設定することが必要となる。

分析期間を有限期に設定するためにしばしば採られる方法は、分析期間に最終期Tを設定し、そのT期までに経済が定常状態に入ることを仮定するものである。定常状態では$\widehat{K}_t = (1+\gamma)\widehat{K}_{t-1}$が成立するため、最終期$T$において以下の関係式が成立することになる。

$$(\gamma+\delta)\widehat{K}_T = I_T \qquad [30]$$

[30]式によって最終期Tにおける資本価格p^{KT}が決まる。

さらに、分析期間が有限期のうちに終了するということは、最終期Tの時点で存在する資本の価値を最適化問題に組み込むことが必要となることを意味する。したがって、企業価値を表現する目的関数が次のように変更される。

$$\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+r_s}\right)\left(w_t^K\widehat{K}_t - p_t I_t\right)\right\} + \left(\prod_{s=1}^{T}\frac{1}{1+r_s}\right)(1+\gamma)p^{KT}\widehat{K}_T$$

[28]式および[30]式のもとで、この新しく設定し直された目的関数を最大化するように各期の資本ストック$\widehat{K}_t$および設備投資I_tの流列を決定することが投資部の問題となる。そして、この問題に関する最適化のための一階条件は、以下のようになる。

$$w_t^K + (1-\delta)\frac{p_{t+1}^K}{1+r_{t+1}} - p_t^K = 0 \qquad (t \neq T)$$

$$w_t^K + (1-\delta)p^{KT} - p_T^K = 0 \qquad (t = T) \qquad [31]$$

$$\frac{p_{t+1}^K}{1+r_{t+1}} - p_t = 0 \qquad (t \neq T)$$

$$p^{KT} - p_T = 0 \qquad (t = T) \qquad [32]$$

[31]式と[32]式によって、それぞれ資本ストック$\widehat{K}_t$および設備投資I_tが決まる。

家計に目を移そう。目的関数を変更し、最終期Tにおいて定常状態に入ることを示す条件式を TVC の代わりに使用する点で、生産部のケースと同様の変更が加えられる。その結果、分析期間を有限期に設定した場合の家計の問題は以下のようになる。

[家計の問題：変更後]

$$\text{Max}\quad \sum_{t=1}^{T}\left[\bar{L}_t\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t\frac{1}{1-\theta}\left\{\left(\frac{C_t}{\bar{L}_t}\right)^{1-\theta}-1\right\}\right]+\left(\prod_{s=1}^{T}\frac{1}{1+r_s}\right)(1+\gamma)\lambda^T A_T$$

$$\text{s.t.}\quad A_t=(1+r_{t-1})\,A_{t-1}+w_t^L\bar{L}_{t-1}-p_{t-1}C_{t-1} \qquad [33]$$

$$p_T C_T=(r_T-\gamma)A_T+w_T^L\bar{L}_T \qquad [34]$$

ここで、A_tおよびC_tは一人当たりではなく、経済全体での資産額および消費量である。$\bar{L}_t$は労働供給量であり、外生変数としてモデルの外から値が与えられる。そして、[33]式および[34]式によって資産価値λ_tおよびλ^Tが決まる。この問題に関する最適化のための一階条件は、以下のとおりである。

$$\left(\frac{1+r_t}{1+r_{t+1}}\right)\lambda_{t+1}-\lambda_t=0 \qquad (t\neq T)$$

$$(1+r_T)\lambda^T-\lambda_T=0 \qquad (t=T) \qquad [35]$$

$$\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t\left(\frac{C_t}{\bar{L}_t}\right)^{-\theta}-\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+r_s}\right)\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}\right)\lambda_{t+1}p_t=0 \qquad (t\neq T)$$

$$\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^T\left(\frac{C_T}{\bar{L}_T}\right)^{-\theta}-\left(\prod_{s=1}^{T}\frac{1}{1+r_s}\right)\lambda^T p_T=0 \qquad (t=T) \qquad [36]$$

[35]式と[36]式によって、それぞれ資産額A_tおよび消費量C_tが決まる。

最後に、各市場における均衡を定義しよう。

$$K_t=\hat{K}_t \qquad [37]$$

$$L_t=\bar{L}_t \qquad [38]$$

$$C_t+I_t=Y_t \qquad [39]$$

$$\left(\frac{1}{1+r_t}\right)p_t^K\hat{K}_t=A_t \qquad [40]$$

[37]式および[38]式はそれぞれ資本市場および労働市場における均衡条件であり、これらによって資本へのリターンw_t^Kおよび賃金率w_t^Lが決まることになる。[39]式は財市場の均衡条件であり、財価格p_tが決まる。[40]式は資産市場における均衡条件となっており、これによって利子率r_tが決定される。

ここで、前節のモデルについて思い出して見てほしい。前節のモデルでは、財がニュメレールに設定されており、財価格が１で固定されていた。そのため、[39]式に相当する関係式がモデルから除外されていた。前節の場合と同様に、本節のモデルにおいてもワルラス法則が成立するため、[37]式から[40]式のうちの１本は残りの３本が成立していれば自動

的に成立する。したがって、[37]式から[40]式のうちのどれか１本はモデルに含める必要はなく、その式によって決定される変数（たとえば[40]式の場合には利子率r_t）の値をモデルの外から与えることになる。そして、その価格を基準とした相対価格によってすべての価格水準が決定される。

最終的に、離散型有限期の Ramsey モデルは[1]式、[25]式から[28]式、[30]式から[36]式、そして[37]式から[40]式の中から選ばれた３本によって記述されることになる。これら 15 本の式をプログラム化し、数値計算用ソフトウェアなどを利用してコンピュータ上で計算を行うことによって各内生変数の均衡解が得られる。そして、一部の外生変数の値を変更することで政策変更などの経済的なショックを表現し、シミュレーション計算を行う。

ここで注意してほしいことは、最適化のための一階条件しかモデルに含まれていないことであり、Time Elimination法における政策関数と定常状態に入る直前の経路の傾きの導出や、動的計画法における状態評価関数の導出などのように解析テクニックを使った追加的作業を一切必要としない点である。複雑な計算を行う過程が増えれば増えるほどミスを誘発するチャンスが増え、エラー発生時に確認しなければならない項目が増加する[6]。より現実的なモデル構築を志向してモデルの複雑化や大規模化が行われる機会の多い数値シミュレーション分析では、可能な限りトラブルの種を排除しておくのが賢明であろう。その意味で、本節で紹介した離散型有限期の定式化は有用であるものと考えている。

2.2 最終期の設定

数値シミュレーション・モデルとして時間を明示的に取り扱うためには、分析期間を有限のものに変更することが必要になると述べた。そして、有限期の分析期間を持つモデルでは最終期Tまでに経済が定常状態に入るように設定が行われることを示した。それでは分析期間の長さ、つまり最終期Tの値はどのように設定すれば良いだろうか。理論モデルでは、定常状態に入るまでに無限期間を要すると仮定されることが多い。その一方で、定常状態に入るまでに要する期間について議論が続けられており、現時点では統一的な合意が得られるまでには至っていない。

ここで、無限期モデルにおける TVC に着目しよう。企業の問題では、[29]式が TVC で

[6] モデルによっては、最適化のための一階条件を導出した後に関係式の整理や代入作業などを行い、需要関数などの形に制約式を変形して記述しているケースがある。これは一階条件を見慣れた形に変形しているだけのことであり、それ以上の特別な解析テクニックを必要とするものではなく、「モデルを解く」という意味ではプラスの効果を一切もたらさないものである。逆に、制約式を変形することにより、かえって制約式とそれによって決定される変数との対応関係が曖昧になる危険性がある。序章で触れられているように、本研究プロジェクトでは、制約式を不等式で記述して Karusch-Kuhn-Tucker（KKT）条件を適用してコーナー解を適切に処理するような、非線形相補問題（Non-Linear Complementarity Problem: MCP）としてモデルを定式化することを選択している。MCP を利用するうえで制約式と変数の対応関係が曖昧になることは致命的なミスを誘発することにつながりかねないため、一階条件の変形は百害あって一利もないものと考える。

ある。

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\left(\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+r_s}\right)p_t^K\widehat{K}_t\right\}=0 \qquad ([29])$$

他方、目的関数には、最終期Tの時点で存在する資本の価値に関する項目が追加される。追加された部分とは、次のようなものであった。

$$\left(\prod_{s=1}^{T}\frac{1}{1+r_s}\right)(1+\gamma)p^{KT}\widehat{K}_T \qquad [41]$$

両者を比較すると、目的関数への追加部分における最終期Tを無限期先に設定したものがTVCであることが分かる。したがって、[41]式に関する部分の値を十分にゼロに近づけることができる程度に分析期間を設定すれば良い。最終期Tの設定によって無限期モデルへの近似誤差をコントロールすることができ、通常、１期１年に設定されたモデルであれば政策変更後に 50 期以上、100 期もあれば十分に使用に耐え得るだけの精度を出すことが可能である[7]。分析期間を長く取れば取るほど近似精度は上がるので、後は利用可能な計算リソースの範囲内で最終期Tの設定値を決定すれば良い。

2.3 パラメータ値の導出

それでは、パラメータの導出に移ろう。連続型無限期モデルのケースと同様に、値を外生的に与える必要のあるパラメータおよび外生変数として、①資本ストックの初期値K_1、②生産関数における単位係数ϕ、③生産関数における資本の投入シェアα、④資本減耗率δ、⑤時間選好率ρ、⑥異時点間の代替弾力性の逆数θ、⑦人口成長率γが挙げられるが、量に関する変数がすべて一人当たりのタームでなく経済全体のタームで示されたものとなっているため、さらに⑧基準年における労働供給量$\bar{L}_1$が追加されて全８種類となっている。このうち、カリブレーションによって導出されるパラメータは①から③までの３種類であり、これらを導出するためには基準年に関する⑨所得Y_1および⑩利子率r_1に関するデータが必要となる。④から⑩までの７種類の値に関しては、公表されている統計資料や実証分析を行っている先行研究などを探して利用する。

まず、[25]式と[27]式より、以下の関係式を得る。

[7] １期５年の設定であれば、20 期あれば十分ということになる。

$$(1-\alpha)p_tY_t = w_t^L L_t$$

ここで、連続型無限期モデルのケースと同様にこのモデルにおいても相対価格に関する部分のみが分析対象となることを考慮し、基準年におけるp_tおよびw_t^Lを1に設定する。その結果、③を得る。

$$\alpha = 1 - \frac{L_1}{Y_1} \qquad [42]$$

次に、[25]式、[26]式、および[32]式を利用して[31]式を書き換えると、次のようになる。

$$\alpha p_t \frac{Y_t}{K_t} + (1-\delta)p_t - (1+r_t)p_{t-1} = 0$$

財をニュメレールとして設定すると、財価格p_tが1で一定となり$p_t = p_{t-1} = 1$が成立する。その結果、①を導出することができる。

$$K_1 = \frac{\alpha Y_1}{r_1+\delta} \qquad [43]$$

最後に[１]式より②が得られる。

$$\phi = \frac{Y_1}{{K_1}^{\alpha}{L_1}^{1-\alpha}} \qquad [44]$$

数値シミュレーション・モデルでは、しばしば基準年において経済が定常状態にあると仮定してパラメータ値が計算される。その理由は二つあると考えられる。第一の理由は、より多くのパラメータ値を導出することができるからである。そして第二の理由として考えられるのは、数値シミュレーション分析においてはプログラムが正確に記述されているか確認するために、しばしば「再現テスト」と呼ばれる作業が行われることである。

「再現テスト」とは、与えられたデータをもとに導出したパラメータ値を使って実際に計算を行い、得られた内生変数の値がもとのデータを正確に再現できるか確認するものである。基準年において経済が定常状態にあると仮定した場合には、分析期間を通してすべての価格変数に変動がなく、また、Ramsey モデルであればすべての数量変数が人口成長率γで成長することになるため、もしそのような解が得られなければプログラムにバグがあ

ると判断できる。したがって、デバッギング作業の負担を大幅に軽減することが可能になるのである。

それでは、基準年において経済が定常状態にあると仮定してパラメータ値を導出してみよう。今回は、①から⑧までのパラメータ・外生変数のうち、①から⑤までをカリブレーションによって導出することが可能となる。ただし、基準年に関する⑪設備投資I_1に関するデータが新しく必要となる。

まず、[35]式と[36]式より、以下の関係を導出することができる。

$$\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left(\frac{\frac{C_{t+1}}{L_{t+1}}}{\frac{C_t}{L_t}}\right)^{-\theta} = \frac{1}{1+r_{t+1}}\left(\frac{1+r_t}{1+r_{t+1}}\right)\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{p_{t+1}}{p_t} = \frac{1}{1+r_{t+1}}\frac{p_{t+1}}{p_t}$$

定常状態では$\frac{C_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{C_t}{L_t}$、$p_{t+1} = p_t$、および$r_{t+1} = r_t = r_1$が成立するため、⑤を得る。

$$\rho = r_1 \tag{45}$$

次に[30]式より、以下を得る。

$$\delta = \frac{I_1}{K_1} - \gamma \tag{46}$$

[46]式を[43]式に代入すると、定常状態を仮定した場合の①を導出することができる。

$$K_1 = \frac{\alpha Y_1 - I_1}{r_1 - \gamma} \tag{47}$$

[47]式によって与えられた①を[46]式に代入すると、④を得る。②と③の導出については、定常状態を仮定しないケースと同様である。

再現テストをクリアしてデバッギング作業を終えた後、基準年において経済が定常状態にないと仮定して導出したパラメータ値に戻すことも可能である。その場合、r_1とは異なる値にρが設定されることにより、定常均衡に向かう経済の移行経路が計算されることになる。

おわりに

本章では、多地域多部門世代重複型シミュレーション・モデル開発の一環として、静学的な AGE モデルを完全予見型動学モデルとして拡張する際にコアとなる部分について、モデルの設定方法やパラメータ値の導出方法などの解説を行った。

まず、マクロ経済学のテキストに見られるもっとも基礎的な無限期連続型の Ramsey モデルについて紹介し、モデルを数値プログラム化する際に利用する Time Elimination 法や分析対象となる経済の挙動を特徴づけるパラメータ値を実際のデータから導出する際に利用するカリブレーション法について概要を示した。その中で、定常状態における経済の性質を確認することから分析がスタートするため、モデルの複雑化や政策シナリオの表現などの面で課題を抱えていることを指摘した。

次に、無限期連続型 Ramsey モデルが抱える欠点を克服するための方法として有限期離散型モデルへの転換を提案し、その方法と注意点について整理した。その中で、無限期モデルにおける TVC が有限期モデルにおける最終期を無限期先に設定したものにすぎないことを指摘するとともに、最終期の設定によって無限期モデルへの近似誤差をコントロールすることができることに言及している。また、基準年において経済が定常状態にないことを仮定してパラメータ値の導出を行う方法と、定常状態にあることを仮定した場合の方法の両方について解説し、定常状態にあることを仮定して得たパラメータ値を利用することで、プログラムのデバッギング作業時にかかる負担を軽減することができる可能性について指摘した。

本研究プロジェクトでは、ここで紹介した有限期離散型 Ramsey モデルをもとに拡張作業を行い、世代重複型への変更を行っている。次章では、世代重複モデルへの拡張がどのように行われているのか解説することにしたい。

【参考文献】

〈外国語文献〉

Brunner, M., and H. Strulik [2002] “Solution of Perfect Foresight Saddlepoint Problems: A Simple Method and Applications,” *Journal of Economics and Control*, Vol. 26, pp. 737-753.

Cass, D. [1965] “Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation,” *Review of Economic Studies*, Vol. 32, pp. 233-240.

Koopmans, T. C. [1965] “On the Concept of Optimal Economic Growth,” in *Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam: North-Holland.

Mulligan, C. B., and X. Sala-i-Martin [1991] “A Note on the Time Elimination Method for Solving Recursive Dynamic Economic Models,” NBER Technical Working Paper, No. 116.

Ramsey, F. [1928] “A Mathematical Theory of Saving,” *Economic Journal*, Vol. 38, pp. 543-559.

Roe, T.L., R. B. W. Smith, and D. S. Saracoglu [2010] *Multisector Growth Models: Theory and Application*, New York: Springer.